

Hauptachsen -Transformation der Induktionsmaschine mit Käfigläufer

Bausch, Heinz
Weis, Michael

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 23, 1971/72,
S.261-290



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Hauptachsen-Transformation der Induktionsmaschine mit Käfigläufer

Von **Heinz Bausch** und **Michael Weis**

Vorgelegt von **Heinz Jordan**

(Eingegangen am 25. Februar 1971)

Zusammenfassung

Ausgehend von der m-strängigen Phasenwicklung im Ständer werden die symmetrischen Komponenten der Spannungen und Ströme sowie ihr Zusammenhang mit den Oberwellen des Luftspaltfeldes abgeleitet. Die N-strängige Käfigwicklung im Läufer legt wegen ihrer einfachen Geometrie eine besondere Betrachtungsweise nahe. Es läßt sich hier eine Zerlegung in Teilfelder umgehen. Die Definition der Impedanzen mit Bezug auf das Gesamtfeld der Käfigwicklung führt nach der Transformation in die symmetrischen Komponenten automatisch auf diejenigen Impedanzen, die der Käfigläufer gegenüber den Oberwellen des vom Ständer erzeugten Luftspaltfeldes aufweist. Die allgemeine Form der Teilspannungsgleichung, die die Wirkung eines beliebigen Feldes der Ordnungszahl ν beschreibt, folgt aus der Betrachtung der magnetischen Kopplung von Phasen- und Käfigwicklung. Daraus läßt sich das Gesamtsystem der Spannungsgleichungen als Summation über die Wirkung der in Betracht zu ziehenden Feldwellen ableiten. Da keine Einschränkungen hinsichtlich des zeitlichen Verlaufs der elektrischen und mechanischen Größen erforderlich sind, eignet sich das System insbesondere zur Behandlung nichtstationärer Vorgänge. Die Gleichungen für den stationären Betrieb sind als Sonderfall darin enthalten.

Summary

The symmetrical components of voltages and currents are given for the m-phase stator winding. Their close connection with the airgap space harmonics is discussed. The N-phase squirrel-cage rotor winding demands a special method of approach because of its simple geometry, an analysis of the space harmonics is not necessary. The definition of its impedances with respect to the total squirrel cage field leads after transformation into the symmetrical components automatically to the impedances relative to stator space harmonics. The general form of the voltage equation describing the effect of a ν -order space harmonic follows from regarding the magnetic coupling between stator and rotor winding. From this the total voltage equation system can be deduced as a summation process of all interesting space harmonics. As there are no restrictions of the time-

depending electrical and mechanical properties the system is especially suited for calculating transient phenomena. Quasistatic equations are contained as a special case.

1. Einleitung

Induktionsmaschinen werden häufig mit nichtsinusförmigen Spannungen und Strömen gespeist und nichtstationär betrieben. Eine exakte Berechnung des Betriebsverhaltens unter Berücksichtigung der Einschwing- und Ausgleichsvorgänge ist hierbei im allgemeinen schon dann verhältnismäßig aufwendig, wenn man sich nur auf die drehmomentbildende Wirkung der sog. Grundwelle des Luftspaltfeldes beschränkt [8, 9]. In vielen Fällen können jedoch auch die räumlichen Oberwellen einen erheblichen Einfluß ausüben, wie zahlreiche Untersuchungen über den stationären Betrieb mit sinusförmigen Spannungen und Strömen gezeigt haben. Es erscheint deshalb vorteilhaft, das Gleichungssystem der Induktionsmaschine für beliebige Betriebszustände so zu erweitern, daß auch die Wirkung der Oberwellen des Luftspaltfeldes Berücksichtigung finden können. Als formales Hilfsmittel empfiehlt sich hierzu die Matrizen Schreibweise. Dadurch wird einerseits ein Höchstmaß an Übersichtlichkeit erreicht und andererseits eine einfache Bearbeitung auf dem Digitalrechner ermöglicht.

Grundsätzliche Vorstellungen hierüber sind schon früh entwickelt [1] und weitergeführt worden [2]. Sie orientierten sich allerdings an einem weitgehend idealisierten Modell der Induktionsmaschine. Erst in letzter Zeit sind Arbeiten bekannt geworden [3, 4], die die Transformation realer Mehrphasenwicklungen in das Zwei-Achsen-Schema zum Gegenstand haben. Aus formalen Gründen werden dabei jedoch die Oberwellen nur bis zu einer bestimmten Ordnungszahl berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, daß eine derartige Beschränkung nicht erforderlich ist. Mit Hilfe elementarer Matrizenoperationen läßt sich nämlich die Wirkung aller interessierenden Oberwellen auf recht einfache Weise übersichtlich darstellen. Da die Oberwellen im wesentlichen bei Käfigläufermotoren von Bedeutung sind, bezieht sich diese Untersuchung vorwiegend auf die besondere Geometrie der Käfigwicklung. Die Impedanzen werden so definiert, daß eine Berechnung aus den Konstruktionsdaten ohne Rückgriff auf Messungen an bereits ausgeführten Maschinen möglich ist.

2. Vorbemerkungen

Bei der Berechnung des transienten Verhaltens von Induktionsmaschinen lassen sich — im Gegensatz zum stationären Betrieb — meist nicht von vornherein Aussagen über den zeitlichen Verlauf der Spannungen und Ströme in den einzelnen Wicklungssträngen machen. Die Untersuchungen müssen deshalb von dem Gesamtsystem der Spannungs(differential-)gleichungen ausgehen, die zunächst für jedes Wicklelement (wie Strang oder Masche) aufzustellen sind. Die relativ

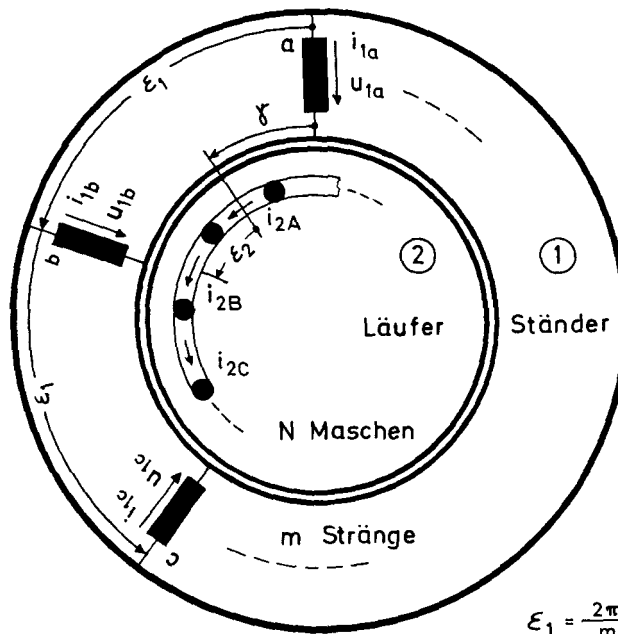
zueinander ruhenden Wicklungsteile (im Ständer oder im Läufer) sind dabei über konstante Gegeninduktivitäten miteinander gekoppelt, sofern man von Änderungen des Sättigungszustandes absieht. Hingegen werden die Differentialgleichungen nichtlinear durch diejenigen Gegeninduktivitäten, welche die Kopplung von Ständer und Läufer beschreiben. Sie sind von der momentanen Stellung des Läufers abhängig und können zunächst nur durch einen entsprechenden allgemeinen Ansatz erfaßt werden. Schließlich kann man auch über den zeitlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit des Läufers nicht von vornherein bestimmte Annahmen machen, wie das etwa bei der Untersuchung des stationären bzw. quasistationären Betriebes möglich ist. Die Winkelgeschwindigkeit wird vielmehr von der dynamischen Grundgleichung mitbestimmt, die somit zum System der Spannungsgleichungen hinzutritt.

Die zunächst für jedes Wicklungselement aufzustellenden Spannungsgleichungen lassen sich in gewissen Fällen zwar durch geeignete Ansätze für die Ströme direkt lösen. Meist empfiehlt es sich jedoch, die Gleichungen durch geeignete Transformationen zu vereinfachen und erst dann nach den Strömen aufzulösen. Die in den Spannungsgleichungen auftretenden Selbst- und Gegeninduktivitäten lassen sich in bekannter Weise mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes berechnen. Unter bestimmten Annahmen (z. B. über Sättigungszustand, Einfluß der Nutung, Exzentrizität, Unipolarfluß usw.) wird dabei zunächst die Verteilung des von jedem Wicklungselement erzeugten magnetischen Feldes in der Maschine ermittelt. Aus der Verkettung des magnetischen Flusses mit den einzelnen Wicklungselementen ergeben sich dann unmittelbar die benötigten Selbst- und Gegeninduktivitäten. Da sich die die Flüsse erzeugenden Ströme aus der Rechnung herausheben, ist eine Kenntnis des zeitlichen Verlaufs der elektrischen und magnetischen Größen nicht erforderlich. Im folgenden wird auf diese Berechnung, die mit üblichen Methoden vorzunehmen ist, nicht besonders eingegangen. Eine gewisse Ausnahme bildet die Käfigwicklung, die eine besondere Behandlung auf Grund ihres Aufbaus nahelegt.

Bild 1 zeigt den schematischen Aufbau einer Induktionsmaschine mit Käfigläufer. Der Ständer besitzt m symmetrische Wicklungsstränge, deren Verteilung sich nach einer doppelten Polteilung exakt wiederholt (phasenreine Ganzlochwicklung). Der Läufer weist eine symmetrische Käfigwicklung mit N Stäben oder Maschen pro doppelter Polteilung auf, so daß im folgenden zunächst ein zweipoliges Modell zugrundegelegt werden kann. Die Ergebnisse sind dann ohne weiteres auf eine Maschine mit p_z Polpaaren zu übertragen.

Für diese Anordnung lautet die Spannungsgleichung in allgemeiner Form

$$(1) \quad \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{11} & Z_{12} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline \end{array}$$



$$\mathcal{E}_1 = \frac{2\pi}{m}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{2\pi}{N}$$

Bild 1: Schema der Asynchronmaschine mit m-strängiger Phasenwicklung im Ständer und N-strängiger Käfigwicklung im Läufer

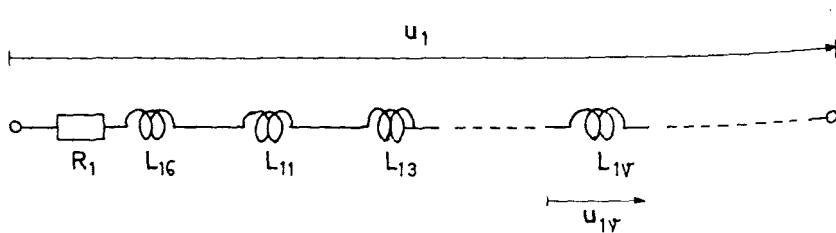


Bild 2: Darstellung eines Ständerstranges durch den ohmschen Widerstand R_1 , die geometrische Streuinduktivität $L_{1\sigma}$ und die Summe der den Teilfeldern zuzuordnenden Luftspaltinduktivitäten $L_{1\nu}$

Die hierin auftretenden Teilmatrizen beschreiben den Ständer (1), den Läufer (2), sowie die Kopplung von Ständer und Läufer. Die Bezeichnungen und deren Bedeutungen gehen im einzelnen aus der Zusammenstellung hervor.

Die Impedanzmatrizen des Ständers (Z_{11}) und des Läufers (Z_{22}) lassen sich dem geometrischen Aufbau der Wicklungen unmittelbar entnehmen. Betrachtet wird zunächst der Ständer.

3. Die m-strängige Phasenwicklung (Ständer)

Jeder Ständerstrang erzeugt infolge seiner räumlichen Verteilung ein treppenförmig abgestuftes polysymmetrisches Luftspaltfeld, das sich in bekannter Weise durch eine Fourier-Reihe in Teilfelder der Ordnungszahlen

$$(2) \quad v = 2g + 1 \quad g = 0, 1, 2 \dots$$

zerlegen läßt. Jedem Teilfeld entspricht eine (Luftspalt-)Induktivität L_{1v} . Ein Ständerstrang läßt sich damit unmittelbar durch die in Bild 2 wiedergegebene Reihenschaltung darstellen, wenn man noch mit R_1 den ohmschen Widerstand und mit $L_{1\sigma}$ die der Nuten- und Stirnstreuung zuzuordnende „geometrische“ Streuinduktivität bezeichnet. Die m Ständerstränge sind miteinander über die jeweiligen Luftspaltfelder magnetisch gekoppelt. Zwischen zwei aufeinander folgenden Strängen, die über das v -te Feld gekoppelt sind, lautet die Gegeninduktivität bekanntlich (vgl. Bild 1):

$$(3) \quad M_{1v} = L_{1v} \cos v \varepsilon_1$$

Die Spannungsgleichung für den Ständer — zunächst ohne die Rückwirkung des als offen betrachteten Läufers — läßt sich damit gemäß Bild 1 und Bild 2 in folgender Form angeben:

$$(4) \quad U_1 = Z_{11} i_1$$

$$\begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & R_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{1\sigma} & & & & \\ & L_{1\sigma} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & L_{1\sigma} \end{bmatrix} p$$

$$+ \sum_v L_{1v} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & \cos v\epsilon_1 & \dots & \dots & \cos v(m-1)\epsilon_1 \\ \cos v(m-1)\epsilon_1 & 1 & \dots & \dots & \cos v(m-2)\epsilon_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos v\epsilon_1 & \cos v2\epsilon_1 & \dots & \dots & 1 \end{matrix} \end{matrix} \mathbf{p} \begin{matrix} i_{1a} \\ i_{1b} \\ \dots \\ \dots \\ i_{1m} \end{matrix}$$

In dieser Schreibweise kommt anschaulich zum Ausdruck, daß die für das Betriebsverhalten maßgeblichen Luftspaltfelder eine besondere Stellung einnehmen. Neben den Spannungen, die auf die geometrischen Größen (ohmscher Widerstand, Nuten- und Stirnstreuung) zurückzuführen sind, werden durch ein beliebiges Luftspaltfeld der Ordnungszahl v in den Ständerwicklungen Teilspannungen induziert, die durch die Matrizengleichung

$$(5) \quad \mathbf{U}_{1v} = \mathbf{L}_{1v} \mathbf{p} \mathbf{i}_1$$

beschrieben werden.

Die Matrix \mathbf{L}_{1v} ist, wie aufgrund der Wicklungsanordnung nicht anders zu erwarten, zyklisch aufgebaut: eine Zeile folgt aus der vorhergehenden durch Verschieben der Elemente um eine Spalte nach rechts. Matrizen zyklischer Bauart besitzen jedoch besonders einfach aufgebaute Eigenvektoren [10]:

(6)

$$\mathbf{C} = \mathbf{b}_1 \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}; \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \begin{matrix} 1 \\ a_1^{-1} \\ a_1^{-2} \\ \vdots \\ a_1^{-(m-1)} \end{matrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 \begin{matrix} 1 \\ a_1^{-2} \\ a_1^{-4} \\ \vdots \\ a_1^{-2(m-1)} \end{matrix}; \quad \text{allg. } \mathbf{x}_K = \mathbf{b}_1 \begin{matrix} 1 \\ a_1^{-K} \\ a_1^{-2K} \\ \vdots \\ a_1^{-K(m-1)} \end{matrix} \quad 0 \leq K \leq m-1$$

$$a_1 = e^{j \frac{2\pi}{m}}$$

die sich bis auf den frei wählbaren Faktor \mathbf{b}_1 aus den komplexen Einheitswurzeln der charakteristischen Gleichung zusammensetzen.

Mit Hilfe der *Vandermonde*'schen Matrix der Eigenvektoren:

(7)

	0	1	2		K		m-1
$c_{S1} = b_1$	1	1	1	...	1	...	1
	1	a_1^{-1}	a_1^{-2}	...	a_1^{-K}	...	$a_1^{-(m-1)}$
	1	a_1^{-2}	a_1^{-4}	...	a_1^{-2K}	...	$a_1^{-2(m-1)}$

	1	a_1^{-K}	a_1^{-2K}	...	a_1^{-KK}	...	$a_1^{-K(m-1)}$

	1	$a_1^{-(m-1)}$	$a_1^{-2(m-1)}$...	$a_1^{-K(m-1)}$...	$a_1^{-(m-1)^2}$

läßt sich bekanntlich die Induktivitätsmatrix \mathbf{L}_{1v} in die Diagonalform transformieren (Hauptachsentransformation), was m entkoppelten Spannungsgleichungen entspricht:

$$(8) \quad \mathbf{L}'_{1v} = \mathbf{C}_{S1}^{-1} \mathbf{L}_{1v} \mathbf{C}_{S1}$$

Zur Vereinfachung empfiehlt es sich, den grundsätzlich beliebig wählbaren Vorfaktor b_1 so zu wählen, daß \mathbf{C}_{S1} normiert wird:

$$(9) \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Es gilt dann:

$$(10) \quad \mathbf{C}_{S1}^{-1} = \mathbf{C}_{S1t}^*$$

Das ist im vorliegenden Fall deshalb besonders zweckmäßig, weil die transformierte \mathbf{C}_{S1t} bereits gleich \mathbf{C}_{S1} ist. In dieser Form findet sich die Transformationsmatrix beispielsweise bei WHITE u. WOODSON [2]. Sie ist identisch mit der Transformation in die symmetrischen Komponenten der Momentanwerte der Spannungen und Ströme. Auf diesen Zusammenhang hat KLIMA [6] hingewiesen. Für die Spannungen und Ströme liegt mithin die Transformation ebenfalls fest. Da vom physikalischen Standpunkt aus zu fordern ist, daß die Aussage der ursprünglichen Spannungsgleichung voll erhalten bleibt (Prinzip der Invarianz der Leistung), gilt

$$\text{vor der Transformation } \mathbf{u}_1 = \mathbf{Z}_{11} \mathbf{i}_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_{1v} = \mathbf{L}_{1v} \mathbf{p} \mathbf{i}_1$$

$$\text{nach der Transformation } \mathbf{u}'_1 = \mathbf{Z}'_{11} \mathbf{i}'_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}'_{1v} = \mathbf{L}'_{1v} \mathbf{p} \mathbf{i}'_1$$

Durch Multiplikation der Gleichung

$$(11) \quad \mathbf{u}_{1v} = \mathbf{L}_{1v} \mathbf{p}_{i1}$$

von links mit \mathbf{C}_{S1t}^* :

$$(12) \quad \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{u}_{1v} = \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{L}_{1v} \mathbf{p}_{i1}$$

bzw.

$$(13) \quad \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{u}_{1v} = \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{L}_{1v} \underbrace{\mathbf{C}_{S1} \mathbf{C}_{S1t}^*}_{\mathbf{I}} \mathbf{p}_{i1}$$

folgt

$$(14) \quad \mathbf{u}'_{1v} = \mathbf{L}'_{1v} \mathbf{p}'_{i1}$$

mit den transformierten Größen

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}'_{1v} &= \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{u}_{1v} \\ \mathbf{i}'_{1v} &= \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{i}_{1v} \\ \mathbf{L}'_{1v} &= \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{L}_{1v} \mathbf{C}_{S1} \end{aligned}$$

Die Umkehrung lautet

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_{1v} &= \mathbf{C}_{S1} \mathbf{u}'_{1v} \\ \mathbf{i}_{1v} &= \mathbf{C}_{S1} \mathbf{i}'_{1v} \end{aligned}$$

Spannungen und Ströme werden also auf gleiche Weise transformiert. Wegen der rechentechnischen Vorteile werden auch im folgenden nur normierte, leistungsinvariante Transformationen verwendet.

Die Wirkung des v -ten Luftspaltfeldes beschreibende Induktivitätsmatrix \mathbf{L}_{1v} geht nach der Transformation in die symmetrischen Komponenten der Momentanwerte über in:

$$(17) \quad \mathbf{L}'_{1v} = \mathbf{C}_{S1t}^* \mathbf{L}_{1v} \mathbf{C}_{S1}$$

$$\mathbf{L}'_{1v} =$$

0	1	K			m-K	m-1
		$\frac{m}{2} L_{1v}$				
					$\frac{m}{2} L_{1v}$	

Der Zusammenhang zwischen der Ordnungszahl ν und der Kennzahl K , die den Platz der von Null verschiedenen Elemente $\frac{m}{2} L_{1\nu}$ in der transformierten Induktivitätsmatrix kennzeichnet, ist gegeben zu

$$(18) \quad \nu - K = gm$$

mit der Nebenbedingung

$$(19) \quad 0 \leq K \leq m - 1$$

Falls die Ordnungszahl ν nur positive Werte annehmen soll, durchläuft g alle positiven ganzen Zahlen einschließlich Null. Läßt man jedoch für ν auch negative Werte zu, um formal etwa die Drehrichtung des zugehörigen Luftspaltfeldes zu kennzeichnen, so durchläuft g alle positiven und negativen ganzen Zahlen. Durch die Angabe von ν und

$$(20) \quad g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \begin{cases} + : \nu > 0 \\ - : \nu < 0 \end{cases}$$

sind die stets gemeinsam auftretenden Plätze K und $m-K$ in der transformierten Induktivitätsmatrix eindeutig gekennzeichnet. Weitere Betrachtungen zeigen, daß die zu den Elementen K und $m-K$ gehörenden Spannungen und Ströme zueinander konjugiert komplex sind. Eine Ausnahme bildet das Nullsystem. Sofern nämlich die Ordnungszahl ν ein Vielfaches der Strangzahl m beträgt, folgt aus Gl. (18).

$$\begin{aligned} K &= 0 \\ \text{und damit} \quad m - K &= m \end{aligned}$$

Die entsprechenden Elemente der transformierten Induktivitätsmatrix treten zusammen auf dem Platz $K = 0$ auf:

$$(21) \quad L'_{1\nu_0} = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & & & & m-1 \\ \hline mL_{1\nu_0} & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Weiterhin zeigt sich, daß bei geraden Strangzahlen das Diagonalelement $K = \frac{m}{2}$ in Gl. (17) stets mit dem Wert $mL_{1\nu}$ besetzt ist, da auch hier die beiden Induktivitäten $\frac{m}{2} L_{1\nu}$ wegen $K = \frac{m}{2}$ und $m-K = \frac{m}{2}$ zusammen auftreten. Die zugehörigen symmetrischen Komponenten der Spannungen und Ströme sind reell.

Die Spannungsgleichung (4) für den Ständer geht damit nach der Transformation in die symmetrischen Komponenten der Momentanwerte über in die Form

$$(22) \quad \mathbf{u}'_1 = \mathbf{Z}'_1 \mathbf{i}'_1$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline u_{1(0)} \\ \hline u_{1(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline u_{1(m-1)} \\ \hline \end{array} \end{array} = \left[\begin{array}{ccccc} R_1 & & & & \\ & R_1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & R_1 \end{array} + \begin{array}{ccccc} L_\sigma & & & & \\ & L_\sigma & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & L_\sigma \end{array} \right] \mathbf{p}$$

$$+ \sum_v \left[\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & \frac{m}{2} L_{1v} & & \\ & & & \frac{m}{2} L_{1v} & \\ & & & & \end{array} \right] \mathbf{p} \begin{array}{|c|} \hline i_{1(0)} \\ \hline i_{1(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline i_{1(m-1)} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & k & m-k & m-1 \end{array}$

Im allgemeinsten Fall einer völlig unsymmetrischen Speisung eines m -Phasen-Systems existieren alle symmetrischen Spannungs- und Stromkomponenten. Die Größe der sich einstellenden Ströme wird dann gemäß Gl. (22) außer von dem ohmschen Stragwiderstand und der geometrischen Streureaktanz nur noch von denjenigen Reaktanzen begrenzt, die jeweils den durch v festgelegten räumlichen Oberwellen des Luftspaltfeldes entsprechen. Umgekehrt läßt sich sofort angeben, welche symmetrischen Komponenten einem bestimmten Luftspaltfeld der Ordnungszahl v zuzuordnen sind.

Üblicherweise wird der Ständer dreisträngig für den Anschluß an ein symmetrisches Drehstromnetz ausgelegt. Im Falle $m = 3$ lautet Gl. (22).

(23)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline u_{1(0)} \\ \hline u_{1(1)} \\ \hline u_{1(1)}^* \\ \hline \end{array} \end{array} = \left[\begin{array}{ccc} R_1 & & \\ & R_1 & \\ & & R_1 \end{array} + \begin{array}{ccc} L_\sigma & & \\ & L_\sigma & \\ & & L_\sigma \end{array} + \sum_v \begin{array}{ccc} mL_{1v0} & & \\ & \frac{m}{2} L_{1v} & \\ & & \frac{m}{2} L_{1v} \end{array} \right] \mathbf{p} \begin{array}{|c|} \hline i_{1(0)} \\ \hline i_{1(1)} \\ \hline i_{1(1)}^* \\ \hline \end{array}$$

Aus Gl. (18) folgt in Verbindung mit den Zusatzbedingungen (19) und (20), daß auf dem Platz $K = 1$ die für die (nur ungeraden) Drehstromordnungszahlen

$$v_+ = 2mg + 1 = +1, -5, +7, -11, +13, \dots$$

zu berechnenden Werte $\frac{m}{2} L_{1v}$ angeordnet sind. Sie kennzeichnen die Drehfelder im Luftspalt bei Anschluß an ein mitlaufendes Spannungssystem. Dem Platz $K = 2$ sind stets die Ordnungszahlen

$$v_- = -1, +5, -7, +11, -13, \dots$$

zugeordnet, die den jeweils gegenlaufenden Drehfeldern entsprechen. Darin kommt anschaulich die sonst übliche Zerlegung der Wechselfelder in entgegengesetzt umlaufende Drehfelder halber Amplitude sowie die Tatsache zum Ausdruck, daß erst durch die Phasenfolge die endgültige Drehrichtung festgelegt wird.

4. Die N-strängige Käfigwicklung (Läufer)

Dieselben Überlegungen gelten auch für den Läufer der Asynchronmaschine, sofern es sich um eine Schleifringwicklung handelt. Die Käfigwicklung hingegen legt eine besondere Betrachtungsweise nahe. Aufgrund des besonderen Aufbaus der Käfigwicklung lassen sich nämlich von vornherein gewisse Aussagen machen, die einerseits die mathematische Behandlung erleichtern und andererseits auch eine präzise Definition der Impedanzen — mit engem Bezug auf die Geometrie der Wicklung — gestatten.

So ist es z. B. im Gegensatz zu den durchweg auf mehrere Nuten verteilten Phasenwicklungen möglich, unmittelbar das von einer Masche erzeugte Luftspaltfeld anzugeben. Weiterhin liegt auf der Hand, daß benachbarte Maschen nicht nur über das Luftspaltfeld, sondern wegen des gemeinsamen Stabes auch über das Nutenstrefelfeld und den ohmschen Widerstand miteinander gekoppelt sind. Dies läßt sich von vornherein bei der Aufstellung der Impedanzmatrix berücksichtigen.

Bild 3 zeigt die Abwicklung des Käfigs und das von einem willkürlich herausgegriffenen Maschenstrom i erzeugte Luftspaltfeld. Dabei wird der Einfachheit halber angenommen, daß die Nutdurchflutung in der Nutmittellinie konzentriert ist und daß die Zahnsättigung sowie der Einfluß der Nutung auf den Luftspaltleitwert vernachlässigt werden können.

Das Durchflutungsgesetz liefert den einfachen Zusammenhang zwischen der Feldstärke H_i innerhalb und der Feldstärke H_a außerhalb der Masche mit dem erzeugenden Strom i zu:

$$(24) \quad H_i - H_a = \frac{i}{\delta}$$

wobei δ der magnetisch wirksame Luftspalt ist. Unter der Voraussetzung, daß kein Unipolarfluß auftritt, ist der Fluß außerhalb der Masche gleich dem Fluß im Innern:

$$(25) \quad \mu_0 H_i A + \mu_0 H_a A (N - 1) = 0$$

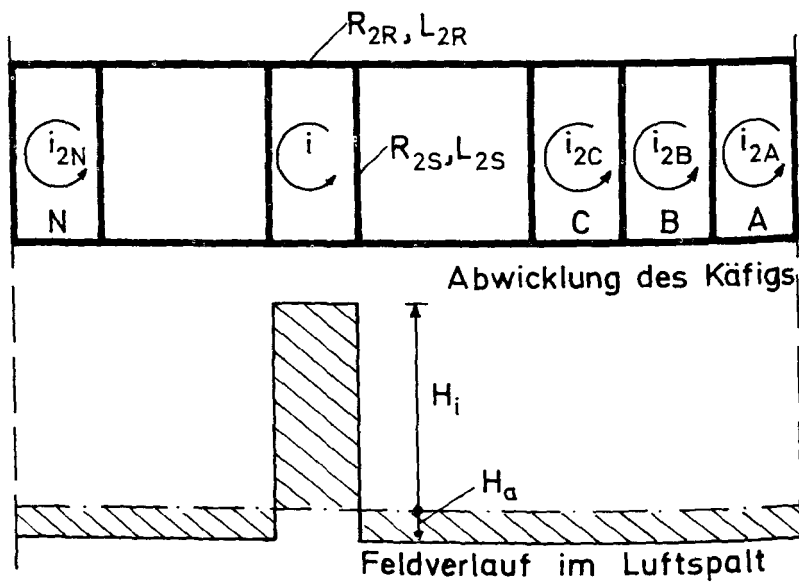


Bild 3: Abwicklung des Käfigs und Luftspaltfeldes einer Käfigmaschine

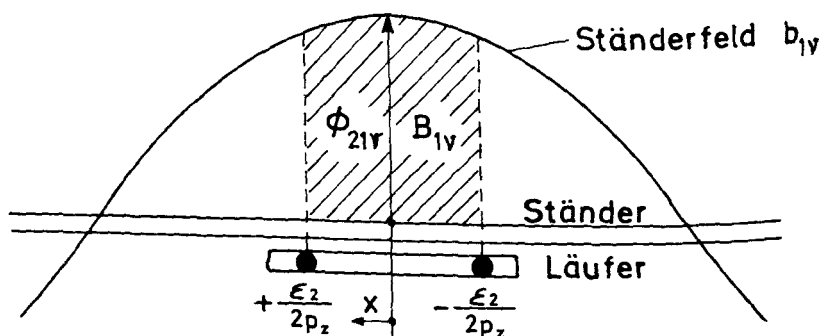


Bild 4: Zur Ermittlung der Gegeninduktivität zwischen einem Ständerstrang und einer Läufermaschine

mit

$$(26) \quad A = \frac{2 \pi R l}{P_z N}$$

als (magnetisch wirksame) Fläche der Masche. Aus den Gln. (24) und (25) folgt:

$$(27) \quad H_i = \frac{i}{\delta} \frac{N-1}{N}$$

und

$$(28) \quad H_a = -\frac{i}{\delta} \frac{1}{N}$$

Aus dem Luftspaltfluß innerhalb der Masche

$$(29) \quad \Phi_i = \mu_0 H_i A = \frac{N-1}{N} \mu_0 \frac{A}{\delta} i$$

folgt deren (Luftspalt-)Selbstinduktivität zu:

$$(30) \quad \frac{\Phi_i}{i} = \frac{N-1}{N} L_{2L}$$

mit

$$(31) \quad L_{2L} = \mu_0 \frac{A}{\delta}$$

Jede der übrigen Maschen umfaßt den Luftspaltfluß

$$(32) \quad \Phi_a = \mu_0 H_a A = -\frac{1}{N} \mu_0 \frac{A}{\delta} i$$

so daß sich als (Luftspalt-)Gegeninduktivität der Wert

$$(33) \quad M_{2L} = -\frac{1}{N} L_{2L}$$

ergibt. Neben dieser Kopplung tritt zwischen benachbarten Maschen wegen der gemeinsamen Stäbe eine weitere Kopplung auf, der die Stabimpedanz

$$(34) \quad Z_{2S} = R_{2S} + L_{2Sp}$$

entspricht.

Die gesamte Impedanz einer Masche setzt sich aus den ohmschen Widerständen und Streuinduktivitäten der beiden Stäbe und Ringstücke sowie aus der Luftspalt-Selbstinduktivität zusammen:

$$(35) \quad Z_{2M} = \underbrace{(2R_{2R} + 2R_{2S})}_{R_{2M}} + \underbrace{\left(2L_{2R} + 2L_{2S} + \frac{N-1}{N} L_{2L} \right)}_{L_{2M}} p$$

Mit dieser Definition der Impedanzen wird die Wirkung des gesamten durch die Käfigwicklung erzeugten Feldes erfaßt. Die für die Phasenwicklung erforderliche Unterscheidung zwischen Grund- und Oberfeldern entfällt hier wegen des einfachen geometrischen Aufbaus der Käfigwicklung.

Die Matrix der Läuferimpedanz läßt sich damit (für eine doppelte Polteilung) angeben zu:

(36)

$$Z_{22} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} & & & \text{N} \\ \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} & Z_{2M} & -Z_{2S}^* pM_{2L} & pM_{2L} & \cdots & pM_{2L} & \cdots & -Z_{2S}^* pM_{2L} \\ & -Z_{2S}^* pM_{2L} & Z_{2M} & -Z_{2S}^* pM_{2L} & \cdots & pM_{2L} & \cdots & pM_{2L} \\ & pM_{2L} & -Z_{2S}^* pM_{2L} & Z_{2M} & \cdots & pM_{2L} & \cdots & pM_{2L} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & pM_{2L} & pM_{2L} & pM_{2L} & \cdots & Z_{2M} & \cdots & pM_{2L} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -Z_{2S}^* pM_{2L} & pM_{2L} & pM_{2L} & \cdots & pM_{2L} & \cdots & Z_{2M} \end{array} \end{array}$$

Wie üblich sind auf der Hauptdiagonalen die Elemente angeordnet, welche die Masche selbst kennzeichnen. Auf den beiden benachbarten Diagonalreihen befinden sich die Größen, die auf die zusätzliche Kopplung benachbarter Maschen durch die gemeinsamen Stäbe hinweisen. Alle übrigen Elemente sind untereinander gleich entsprechend dem homogenen Luftspaltfeld.

Die Matrix Z_{22} ist zyklisch aufgebaut, so daß die Hauptachsentransformation (Transformation in symmetrische Komponenten) mit Hilfe der Matrix

(37)

$$C_{S2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & 0 & 1 & 2 & & K & & N-1 \\ \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & a_2^{-1} & a_2^{-2} & \cdots & a_2^{-K} & \cdots & a_2^{-(N-1)} \\ & 1 & a_2^{-2} & a_2^{-4} & \cdots & a_2^{-2K} & \cdots & a_2^{-2(N-1)} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1 & a_2^{-K} & a_2^{-2K} & \cdots & a_2^{-KK} & \cdots & a_2^{-K(N-1)} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1 & a_2^{-(N-1)} & a_2^{-2(N-1)} & \cdots & a_2^{-K(N-1)} & \cdots & a_2^{-(N-1)^2} \end{array} \end{array}$$

durchgeführt werden kann. Hierin ist

$$(38) \quad a_2 = e^{j\varepsilon_2} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{2\pi}{N}$$

Man erhält die transformierte Impedanzmatrix

$$\mathbf{Z}'_{22} = \mathbf{C}_{S2t}^* \mathbf{Z}_{22} \mathbf{C}_{S2}$$

nach elementarer Rechnung zu:

(39)

$$\mathbf{Z}'_{22} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & & K & & N-1 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} Z_{2(0)} & & & & & & \\ & Z_{2(1)} & & & & & \\ & & Z_{2(2)} & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & Z_{2(K)} & & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & Z_{2(N-1)} \end{array} \end{array}$$

Hierin ist die Impedanz des K-ten Elementes auf der Hauptdiagonalen durch die Beziehung

$$(40) \quad Z_2(K) = \begin{bmatrix} 2 R_{2R} + R_{2S} \left(2 \sin \frac{K\pi}{N} \right)^2 \\ 2 L_{2R} + L_{2S} \left(2 \sin \frac{K\pi}{N} \right)^2 + L_{2L} \end{bmatrix} p$$

gegeben.

Eine Ausnahme bildet auch hier die Impedanz für $K = 0$:

$$(21) \quad Z_2(0) = 2 R_{2R} + 2 L_{2R} p$$

Sie enthält nur die Ringgrößen. Der entsprechende Strom $i_2(0)$ existiert aber nur, wenn die Summe aller Maschenströme, die identisch mit den Ringströmen sind, von Null verschieden ist. Der Strom $i_2(0)$ muß dann die Läuferwelle umfassen, was bekanntlich einen Wellenfluß zur Folge hat. Dieser Fall soll hier nicht weiter verfolgt werden. Aus diesem Grunde spielt das Element $K = 0$ keine Rolle. Es ist jedenfalls nicht identisch mit der Impedanz der Käfigwicklung gegenüber dem üblicherweise als Nullfeld bezeichneten Luftspaltfeld dreifacher Polzahl.

Durch die Matrix \mathbf{C}_{S2} , Gl. (37), liegt auch die Transformationsvorschrift für die N Maschenströme $i_{2A} \dots i_{2N}$ fest, da die Leistung invariant bleiben soll. Es gilt:

$$\mathbf{i}'_2 = \mathbf{C}_{S2t}^* \mathbf{i}_2$$

oder ausführlicher:

(42)

		A	B	C			N		
$i_2(0)$	$= \frac{1}{\sqrt{N}}$	1	1	1	...	1	...	1	i_{2A}
$i_2(1)$		1	a_2	a_2^2	...	a_2^K	...	$a_2^{(N-1)}$	i_{2B}
$i_2(2)$		1	a_2^2	a_2^4	...	a_2^{2K}	...	$a_2^{2(N-1)}$	i_{2C}
...	
$i_2(K)$		1	a_2^K	a_2^{2K}	...	a_2^{KK}	...	$a_2^{K(N-1)}$...
...	
$i_2(N-1)$		1	$a_2^{(N-1)}$	$a_2^{2(N-1)}$...	$a_2^{K(N-1)}$...	$a_2^{(N-1)^2}$	i_{2N}

Wegen

$$(43) \quad a_2^{(N-1)} = a_2^{-1}, \text{ etc.}$$

sind die Ströme $i_{2(N-1)}$ und $i_{2(1)}$ zueinander konjugiert komplex:

$$(44) \quad i_{2(N-1)} = i_{2(1)}^*$$

Entsprechendes gilt auch für die übrigen Stromsysteme. Es treten jeweils paarweise konjugiert komplexe Systeme auf:

$$(45) \quad i_{2(N-K)} = i_{2(K)}^* \quad K = 1, 2, \dots, N-1$$

Ist N gerade, so erhält man im Fall $K = \frac{N}{2}$ nur ein einziges, reelles Stromsystem.Für die Impedanzen gilt ein entsprechender Zusammenhang. Es ist nämlich
(46) $Z_{2(N-K)} = Z_{2(K)}$
weil wegen des Aufbaus der Käfigwicklung

$$(47) \quad \sin(N-K) \frac{\pi}{N} = \sin K \frac{\pi}{N}$$

gilt.

5. Magnetische Kopplung Ständer/Läufer

Das von einem Ständerstrang der m -strängigen Ständerwicklung erzeugte v -te Luftspaltfeld

$$(48) \quad b_{1v} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \frac{W_1 \xi_{1v}}{v \delta} i_1 \cos v p_z x$$

erzeugt den mit einer ungeschrägten Läufermasche gemäß Bild 4 maximal verketteten Fluß

$$+ \frac{\varepsilon_2}{2pz}$$

$$(49) \quad \Phi_{21v} = \int b_{1v} R l dx = M_{21v} i_1 - \frac{\varepsilon_p}{2pz}$$

woraus sich der Höchstwert der Gegeninduktivität zwischen einem Ständerstrang und einer Läufermasche zu

$$(50) \quad M_{21v} = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{Rl}{p_z \delta} \frac{W_1 \xi_{1v}}{v^2} \sin\left(v \frac{\pi}{N}\right)$$

bestimmen läßt.

Bei Schrägung der Läufernuten um den elektrischen Zentriwinkel γ_s ist dieser Wert mit dem Schrägungsfaktor

$$(51) \quad \xi_{Sv} = \frac{\sin(v \gamma_s/2)}{(v \gamma_s/2)}$$

zu multiplizieren.

Die für ein bestimmtes Luftspaltfeld Ordnungszahl v berechnete Gegeninduktivität ändert sich mit dem Cosinus des elektrischen Winkels zwischen den jeweiligen Wicklungsachsen. Daraus folgt die Matrix der v -ten Koppelreaktanzen Ständer \rightarrow Läufer mit den Winkelbezeichnungen gemäß Bild 1 zu

(52)

	a	b	k_1		m
A	$\cos v\gamma$	$\cos v(\gamma - \varepsilon_1)$	$\cos v(\gamma - K_1 \varepsilon_1)$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cos v(\gamma - (m-1)\varepsilon_1)$
B	$\cos v(\gamma + \varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cos v(\gamma - (m-1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$
C	$\cos v(\gamma + 2\varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - K_1 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cos v(\gamma - (m-1)\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$
$Z_{21v} =$ $M_{21v} p$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$
K_2	$\cos v(\gamma + K_2 \varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - \varepsilon_1 + K_2 \varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - K_1 \varepsilon_1 + K_2 \varepsilon_2)$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cos v(\gamma - (m-1)\varepsilon_1 + K_2 \varepsilon_2)$
	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$
N	$\cos v(\gamma + (N-1)\varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - \varepsilon_1 + (N-1)\varepsilon_2)$	$\cos v(\gamma - K_1 \varepsilon_1 + (N-1)\varepsilon_2)$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cos v(\gamma - (m-1)\varepsilon_1 + (N-1)\varepsilon_2)$

Die Rückwirkung des Käfigläufers auf den Ständer mit einem Feld derselben Ordnungszahl v wird durch die Transponierte beschrieben:

$$(53) \quad Z_{12v} = Z_{21v}^T$$

Die Impedanzen in der dem v -ten Feld entsprechenden (Teil-)Spannungsgleichung

$$(54) \quad \begin{array}{|c|} \hline u_{1v} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{11v} & Z_{12v} \\ \hline Z_{21v} & Z_{22v} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i_{1v} \\ \hline i_{2v} \\ \hline \end{array}$$

sind damit definiert. Die Transformation in die symmetrischen Komponenten der Momentanwerte unter Verwendung der Transformationsmatrix

$$(55) \quad \mathbf{C}_{S1} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{C}_{S1} & \\ \hline & \mathbf{C}_{S2} \\ \hline \end{array}$$

liefert die Koppelmatrix

$$(56) \quad \mathbf{Z}'_{21v} = \mathbf{C}_{S2t}^* \mathbf{Z}_{21v} \mathbf{C}_{S1}$$

zu

$$(57a) \quad \begin{array}{c} \mathbf{Z}'_{21v} = \mathbf{M}_y \mathbf{D} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & K_1 & m-K_1 & m-1 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ K_2 \\ N-K_2 \\ N-1 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline e^{-j\nu r} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

mit

$$(57b) \quad \mathbf{M}_v = \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{N}{2}} \mathbf{M}_{21v}$$

Die den Platz der stets konjugiert-komplexen Gegeninduktivitäten beschreibenden Kennzahlen K_1 und K_2 gehorchen den Bedingungen

$$(58) \quad v - K_1 = g_1 m, 0 \leq K_1 \leq m-1, g_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

und

$$(59) \quad v - K_2 = g_2 N, 0 \leq K_2 \leq N-1, g_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Im Falle $K_1 = 0$ (Nullsystem des Ständers) ergeben sich zwei Werte in der ersten Spalte. Das Element 0/0 hat stets den Wert Null, da für den dann auftretenden Fall $v_0 = g_1$ m und $v_0 = g_2$ N die Gegeninduktivität M_{v0} verschwindet (Fluß in der Masche gleich Null).

Damit läßt sich nunmehr die vollständige Spannungsgleichung für die Wirkung eines Luftspaltfeldes der Ordnungszahl v angeben, wenn man noch die Beziehung

$$(60) \quad \mathbf{Z}'_{12v} = \mathbf{Z}^*_{21vt}$$

berücksichtigt. Für die weiteren Untersuchungen soll von der Wirkung der Felder mit den Ordnungszahlen v_0 (Nullsysteme) abgesehen werden. Die Felder der entsprechend Gl. (18) definierten Drehstromordnungszahlen v erzeugen gemäß den abgeleiteten Koppelmatriizen jeweils zwei konjugiert komplexe Stromsysteme im Käfigläufer, nämlich:

$$i_{2v} = i_{2(K)} \text{ und } i_{2v}^* = i_{2(N-K)}$$

Alle anderen Stromsysteme sind gleich Null. Demgemäß lautet die Spannungsgleichung für ein bestimmtes Feld der Ordnungszahl v :

(61)

$$\begin{bmatrix} u_{1v} \\ u_{1v}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} L_{1v} p & & M_v p e^{+jv\tau} & \\ & \frac{m}{2} L_{1v} p & & M_v p e^{-jv\tau} \\ M_v p e^{-jv\tau} & & R_{2v} + L_{2v} p & \\ & M_v p e^{+jv\tau} & & R_{2v} + L_{2v} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1v} \\ i_{1v}^* \\ i_{2v} \\ i_{2v}^* \end{bmatrix}$$

Die hierin auftretenden Impedanzen des Käfigläufers sind gemäß Gl. (40) zu berechnen. Es zeigt sich, daß die Umrechnung der Stabgrößen auf den Ring mit der aus der stationären Drehfeldtheorie her bekannten Umrechnung identisch ist.

Die Form dieser Gleichung legt es nahe, das Läuferstromsystem auf den Ständer zu beziehen:

$$(62) \quad \begin{bmatrix} i_{2v}' \\ i_{2v}^{*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{+jv\tau} & \\ & e^{-jv\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{2v} \\ i_{2v}^* \end{bmatrix}$$

abgekürzt:

$$(63) \quad \mathbf{i}'_{2v} = \mathbf{C}^*_{2Kvt} \mathbf{i}_{2v}$$

Demgemäß ist Gl. (61) mit der Matrix der „Kommutator“-Transformation [5]

$$(64) \quad C_{\kappa\gamma} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & C_{2\kappa\gamma} \\ \hline \end{array}$$

zu transformieren. Die Spannungsgleichung geht damit über in

$$(65) \quad \mathbf{u}'_{\gamma} = \mathbf{Z}'_{\gamma} \mathbf{i}'_{\gamma}$$

oder ausführlicher:

$$(66) \quad \begin{array}{|c|} \hline u'_{1\gamma} \\ \hline u'^{*}_{1\gamma} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{m}{2} L_{1\gamma} p & & M_{\gamma} p & \\ \hline & \frac{m}{2} L_{1\gamma} p & & M_{\gamma} p \\ \hline M_{\gamma}(p - j\gamma\dot{\gamma}) & & R_{2\gamma} + L_{2\gamma}(p - j\gamma\dot{\gamma}) & \\ \hline & M_{\gamma}(p + j\gamma\dot{\gamma}) & & R_{2\gamma} + L_{2\gamma}(p + j\gamma\dot{\gamma}) \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i'_{1\gamma} \\ \hline i'^{*}_{1\gamma} \\ \hline i'_{2\gamma} \\ \hline i'^{*}_{2\gamma} \\ \hline \end{array}$$

Durch die Anwendung der Kommutatortransformation ist die Abhängigkeit von dem Winkel γ ersetzt worden durch eine Abhängigkeit von der (elektrischen) Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$. Im stationären Betrieb ist

$$\dot{\gamma} = (1-s)\omega$$

konstant. In diesem Falle kennzeichnet

$$p - j\gamma\dot{\gamma} = j\omega - j\gamma(1-s)\omega = j \left\{ 1 - \gamma(1-s) \right\} \omega = js_{\gamma}\omega$$

die Schlupfkreisfrequenz des γ -ten Feldes. Für das Grundfeld ($\gamma = 1$) ergeben sich aus obiger Gleichung die bekannten Kreisfrequenzen $s\omega$ und $(2-s)\omega$.

Im nichtstationären Betrieb läßt sich meist keine Aussage über die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ machen.

Es empfiehlt sich dann, die komplexe Gleichung (61), welche zwei konjugiert komplexe Teilgleichungen enthält, in reelle d, q-Komponenten zu zerlegen. Aus Gründen der Leistungsinvarianz verwendet man zweckmäßig die orthogonale Zweiaachsen-Transformation:

(67)

$$\begin{bmatrix} i_{1v}' \\ i_{1v}^{*'} \\ i_{2v}' \\ i_{2v}^{*'} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & +j & & \\ 1 & -j & & \\ & & 1 & +j \\ & & 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1dv} \\ i_{1qv} \\ i_{2dv} \\ i_{2qv} \end{bmatrix}$$

$\longleftrightarrow C_z \longleftrightarrow$

Die komplexe Spannungsgleichung (61) geht damit über in die reelle Form:

(68)

$$\begin{bmatrix} u_{1dv} \\ u_{1qv} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} L_{1v} p & & M_v p & \\ & \frac{m}{2} L_{1v} p & & M_v p \\ M_v p & v \dot{f} M_v & R_{2v} + L_{2v} p & v \dot{f} L_{2v} \\ -v \dot{f} M_v & M_v p & -v \dot{f} M_v & R_{2v} + L_{2v} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1dv} \\ i_{1qv} \\ i_{2dv} \\ i_{2qv} \end{bmatrix}$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die Wirkung eines bestimmten Luftspaltfeldes der nach Gl. (18) definierten Ordnungszahl v .

In Form von Teilmatrizen lautet sie

$$(69) \quad \mathbf{u}_v = \mathbf{L}_v \mathbf{p} \mathbf{i}_v + \dot{f} \mathbf{G}_v \mathbf{i}_v$$

Die vom Netz hierfür zu liefernde Leistung beträgt

$$(70) \quad \mathbf{i}_{vt} \mathbf{u}_v = \mathbf{i}_{vt} \mathbf{L}_v \mathbf{p} \mathbf{i}_v + \dot{f} \mathbf{i}_{vt} \mathbf{G}_v \mathbf{i}_v$$

Daraus folgt unmittelbar das dem v -ten Feld zuzuordnende Drehmoment zu:

$$(71) \quad T_v = \mathbf{i}_{vt} \mathbf{G}_v \mathbf{i}_v = v M_v (i_{1qv} i_{2dv} - i_{1dv} i_{2qv})$$

6. System der Spannungsgleichungen

Zur numerischen Ausrechnung müssen die oben definierten Ströme bekannt sein. Dazu ist nunmehr das Gesamtsystem der Spannungsgleichungen für den Käfigläufermotor aufzustellen. Dieses System ergibt sich aus der Summe der Wir-

kungen der Teilfelder. Die Summe der von den Teilfeldern induzierten Spannungen u_{1v} sowie die von den geometrischen Streufeldern (Nut, Stirn) induzierte Spannung halten der angelegten Strangspannung u_1 bis auf den ohmschen Spannungsfall das Gleichgewicht:

$$(72) \quad u_1 = R_1 i_1 + L_{1\sigma} p i_1 + \sum_v u_{1v}$$

Unter Berücksichtigung der abgeleiteten Beziehungen läßt sich diese Matrizen-gleichung für jede m/N-strängige Asynchronmaschine aufstellen.

Für eine Maschine mit dreisträngigem Ständer ergeben sich bei beliebigem Netzanschluß stets nur zwei Ständerstromsysteme, wenn man von dem meist nicht auftretenden Nullsystem absieht. In diesem Fall sind $i_{1dv} = i_{1d}$ und $i_{1qv} = i_{1q}$, die Luftspaltfelder werden von denselben Ständerströmen erregt. Auf jedes Luftspaltfeld reagiert die Käfigwicklung jedoch mit einem anderen Stromsystem. Das Gesamtsystem der Spannungsgleichungen zur Berechnung beliebiger dynamischer Vorgänge lautet dann wie in Gl. (73) angegeben.

Hierin wurde zur Abkürzung

$$(74) \quad L_1 = L_{1\sigma} + \sum_2^m L_{1r}$$

gesetzt. Grundsätzlich treten im Luftspalt unendlich viele Teilfelder entsprechend der Fourier-Analyse auf. Ihre Wirkung nimmt jedoch mit steigender Ordnungszahl ab, so daß es ausreicht, nur eine endliche Anzahl zu berücksichtigen. Die höchste in Gl. (73) auftretende Ordnungszahl ist $v_{\max} = n$. Welche Ordnungszahl n jeweils gewählt werden muß, richtet sich nach dem zu untersuchenden Problem. Vielfach genügt es bereits, lediglich die Wirkung des Grundfeldes in der Maschine zu berücksichtigen. Es ist dann $v_{\max} = n = 1$. In jedem Falle ist aber die in Gl. (74) auftretende Summe zu bilden. Sie enthält die (unabgedämpfte) doppeltver-

(73)

u_{1d}	R_1+L_1p		M_1p		\dots		M_{yp}		\dots		M_np		i_{1d}
u_{1q}		R_1+L_1p		M_1p		\dots		M_{yp}		\dots		M_np	i_{1q}
0	M_1p	$j\dot{M}_1$	$R_{21}^*+L_{21}p$	$j\dot{L}_{21}$									i_{2d1}
0	$-j\dot{M}_1$	M_1p	$-j\dot{L}_{21}$	$R_{21}^*+L_{21}p$									i_{2q1}
\vdots	\dots	\dots			\dots	\dots							\vdots
\vdots	\dots	\dots			\dots	\dots							\vdots
=													
0	M_{yp}	$y\dot{j}M_y$					$R_{2y}^*+L_{2y}p$	$y\dot{j}L_{2y}$					i_{2dy}
0	$-y\dot{j}M_y$	M_{yp}					$-y\dot{j}L_{2y}$	$R_{2y}^*+L_{2y}p$					i_{2qy}
\vdots	\dots	\dots							\dots	\dots			\vdots
\vdots	\dots	\dots							\dots	\dots			\vdots
0	M_np	$n\dot{j}M_n$									$R_{2n}^*+L_{2n}p$	$n\dot{j}L_{2n}$	i_{2dn}
0	$-n\dot{j}M_n$	M_np									$-n\dot{j}L_{2n}$	$R_{2n}^*+L_{2n}p$	i_{2qn}

kettete Streuung der Ständerwicklung. Die doppelt verkettete Streuung des Läuferkäfigs wird durch den verwendeten Ansatz stets automatisch berücksichtigt.

Aus Gl. (73) lassen sich die Ströme berechnen. Aus einer Leistungsbilanz dieser Gleichung, die abgekürzt in der Form

$$(75) \quad \mathbf{i}_t \mathbf{u} = \mathbf{i}_t \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{i}_t \mathbf{L} \dot{\mathbf{p}} \mathbf{i} + \dot{\mathbf{i}}_t \mathbf{G} \mathbf{i}$$

geschrieben werden kann, folgt das gesamte elektromagnetisch entwickelte Drehmoment zu

$$(76) \quad T = \mathbf{i}_t \mathbf{G} \mathbf{i}$$

Das Drehmoment setzt sich aus den nach Gl. (71) zu berechnenden Drehmomentkomponenten der Teilfelder zusammen:

$$(77) \quad T = \sum_{v=1}^n T_v$$

Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, daß sich alle Ableitungen auf ein Polpaar der zu untersuchenden Maschine beziehen. Sind p_z gleiche Polpaare vorhanden, so sind — bei der üblichen Reihenschaltung der Pole — die Spannungen und Impedanzen mit p_z zu multiplizieren. Falls die Anzahl der Nuten pro Pol und Strang der Ständerwicklung oder die Anzahl der Stäbe pro doppelter Polteilung im Käfigläufer keine ganze Zahl ist (Bruchlochwicklungen), so ist die Untersuchung solange auf weitere Polpaare auszudehnen, bis sich die elektromagnetischen Verhältnisse am Umfang exakt wiederholen („Größter gemeinsamer Teiler“). Auf ähnliche Probleme haben KLIMA und HELLER kürzlich hingewiesen [7].

8. Stationärer Betrieb

Abschließend werde noch kurz der stationäre Betrieb der dreisträngigen Asynchronmaschine mit Käfigläufer betrachtet. Die Strangspannungen

$$(78) \quad \begin{aligned} u_{1a} &= \sqrt{2} U_1 \cos \omega t \\ u_{1b} &= \sqrt{2} U_1 \cos (\omega t - \varepsilon_1) \\ u_{1c} &= \sqrt{2} U_1 \cos (\omega t + \varepsilon_1) \end{aligned}$$

können direkt mit Hilfe zweier aufeinander folgender Transformationen in die reellen d, q-Komponenten zerlegt werden:

$$(79) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{C}_{Zt}^* \mathbf{C}_{St}^* \mathbf{u}$$

ausführlich:

(80)

$$\begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{1d} \\ u_{1q} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & 1 & 1 \\ & -j & +j \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+j\varepsilon_1} & e^{-j\varepsilon_1} \\ 1 & e^{-j\varepsilon_1} & e^{+j\varepsilon_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \\ u_{1c} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline & +\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline u_{1a} \\ \hline u_{1b} \\ \hline u_{1c} \\ \hline \end{array}$$

Man erhält mit Gl. (76)

$$(81) \quad \begin{aligned} u_{10} &= 0 \\ u_{1d} &= \sqrt{3} U_1 \cos \omega t \\ u_{1q} &= \sqrt{3} U_1 \sin \omega t \end{aligned}$$

oder in Form von Zeigern

$$(82) \quad \begin{aligned} u_{10} &= 0 \\ u_{1d} &= \operatorname{Re} \left\| \sqrt{3} U_1 e^{j\omega t} \right\| \\ u_{1q} &= \operatorname{Re} \left\| -j \sqrt{3} U_1 e^{j\omega t} \right\| \end{aligned}$$

Ein entsprechender Ansatz empfiehlt sich für die Ständerströme

$$(83) \quad \begin{aligned} i_{1d} &= \operatorname{Re} \left\| \sqrt{3} I_1 e^{j\omega t} \right\| \\ i_{1q} &= \operatorname{Re} \left\| -j \sqrt{3} I_1 e^{j\omega t} \right\| \end{aligned}$$

und für die Läuferströme

$$(84) \quad \begin{aligned} i_{2dv} &= \operatorname{Re} \left\| \sqrt{3} I_{2v} e^{j\omega t} \right\| \\ i_{2qv} &= \operatorname{Re} \left\| -j \sqrt{3} I_{2v} e^{j\omega t} \right\| \end{aligned}$$

Der (komplexe) Effektivwert I_{2v} ist nach dieser Definition eine fiktive Größe, deren Zusammenhang mit dem tatsächlich auftretenden Ringstrom im folgenden kurz wiedergegeben werden soll. Aus den reellen d, q-Komponenten folgen zunächst die konjugiert komplexen Ströme zu:

$$(85) \quad \begin{array}{|c|} \hline i_{2v}' \\ \hline i_{2v}^* \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & +j \\ \hline 1 & -j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i_{2dv} \\ \hline i_{2qv} \\ \hline \end{array}$$

Die Rücktransformation auf den Läufer liefert

$$(86) \quad \begin{array}{|c|} \hline i_{2v} \\ \hline i_{2v}^* \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline e^{-j\nu\tau} & \\ \hline & e^{+j\nu\tau} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i_{2v}' \\ \hline i_{2v}^* \\ \hline \end{array}$$

$\leftarrow C_{2\kappa\nu} \rightarrow$

Daraus folgen wiederum die tatsächlich im Läufer auftretenden Maschinenströme, die mit den Ringströmen identisch sind, mit Hilfe der Matrix C_{S2} zu:

$$(87) \quad \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad K \quad \dots \quad N-K \quad N-1 \\ \begin{array}{c} i_{2A} \\ i_{2B} \\ \vdots \\ i_{2\mu} \\ \vdots \\ i_{2N} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & a_2^{-K} & \dots & \dots & a_2^{+K} & \dots \\ \dots & \dots & a_2^{-2K} & \dots & \dots & a_2^{+2K} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_2^{-(\mu-1)K} & \dots & \dots & a_2^{+(\mu-1)K} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_2^{-(N-1)K} & \dots & \dots & a_2^{+(N-1)K} & \dots \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ i_{2v} \\ 0 \\ 0 \\ i_{2v}^* \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Der Strom in der Masche μ beträgt demnach

$$(88) \quad i_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(a_2^{-(\mu-1)K} i_{2v} + a_2^{+(\mu-1)K} i_{2v}^* \right)$$

bzw. mit den Gl. (84), (85) und (86):

$$(89) \quad i_{2\mu} = \sqrt{\frac{3}{N}} \sqrt{2} I_{2v} \cos [s_1 \omega t + \varphi_{2v} - (\mu-1)K\varepsilon_2]$$

Der Zusammenhang zwischen dem Effektivwert des Ringstromes I_{2Rv} und dem des in Gl. (84) verwendeten fiktiven Läuferstromes I_{2v} ist also gegeben zu:

$$(90) \quad I_{2Rv} = \sqrt{\frac{3}{N}} I_{2v}$$

Weiterhin sind bei stationärem (und symmetrischem) Betrieb die in Gl. (73) für die d- und q-Komponenten gemachten Aussagen identisch. Es ergibt sich somit anstelle der reellen Gleichung die gewohnte komplexe Gleichung mit halber Zeilen- und Spaltenzahl:

(91)

$$\begin{array}{c} U_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M_1 & \dots & j\omega M_p & \dots & j\omega M_n \\ j s_1 \omega M_1 & R_2^* + j s_1 \omega L_{21} & & & & \\ \dots & & \dots & & & \\ j s_p \omega M_p & & & R_{2p}^* + j s_p \omega L_{2p} & & \\ \dots & & & & \dots & \\ j s_n \omega M_n & & & & & R_{2n}^* + j s_n \omega L_{2n} \end{array} \begin{array}{c} \hat{I}_1 \\ I_{21} \\ \vdots \\ I_{2p} \\ \vdots \\ I_{2n} \end{array}$$

Für den stationären Betrieb ergibt sich gemäß Gl. (71) das Drehmoment des v -ten Feldes zu

$$(92) \quad T_r = 3v M_r J_m \left\| \begin{matrix} I_1 & I_{2v}^* \end{matrix} \right\|$$

Damit lautet das Gesamtmoment:

$$(93) \quad T = \sum_{v=1}^n T_r = 3 J_m \left\| I_1 \sum_{v=1}^n v M_r I_{2v}^* \right\|$$

9. Zusammenfassung

Ausgehend von der m -strängigen Phasenwicklung im Ständer werden die symmetrischen Komponenten der Spannungen und Ströme sowie ihr Zusammenhang mit den Oberwellen des Luftspaltfeldes abgeleitet. Die N -strängige Käfigwicklung im Läufer legt wegen ihrer einfachen Geometrie eine besondere Betrachtungsweise nahe. Es läßt sich hier eine Zerlegung in Teilfelder umgehen. Die Definition der Impedanzen mit Bezug auf das Gesamtfeld der Käfigwicklung führt nach der Transformation in die symmetrischen Komponenten automatisch auf diejenigen Impedanzen, die der Käfigläufer gegenüber den Oberwellen des vom Ständer erzeugten Luftspaltfeldes aufweist. Die allgemeine Form der Teilspannungsgleichung, die die Wirkung eines beliebigen Feldes der Ordnungszahl v beschreibt, folgt aus der Betrachtung der magnetischen Kopplung von Phasen- und Käfigwicklung. Daraus läßt sich das Gesamtsystem der Spannungsgleichungen als Summation über die Wirkung der in Betracht zu ziehenden Feldwellen ableiten. Da keine Einschränkungen hinsichtlich des zeitlichen Verlaufs der elektrischen und mechanischen Größen erforderlich sind, eignet sich das System insbesondere zur Behandlung nichtstationärer Vorgänge. Die Gleichungen für den stationären Betrieb sind als Sonderfall darin enthalten.

Bezeichnungen

a	Operator $e^{j\epsilon}$
A	magnetisch wirksame Fläche einer Käfigmaschine
C_{K v}	Matrix der Kommutatortransformation für das v -te Feld
C_S	Matrix der Transformation in die symmetrischen Komponenten der Momentanwerte
C_Z	Matrix der Zweiachsentransformation
G	Matrix der Induktivitäten (Rotationsspannung)
i_l	Matrix der Ständerstrangströme

i_{1a}	}	Ständerstrangströme
i_{1b}		
.		
.		
i_{1m}	}	Symmetrische Komponenten der Ständerstrangströme
$i_{1(0)}$		
$i_{1(1)}$		
.		
.	}	Matrix der Ringströme des Käfigläufers
$i_{1(m-1)}$		
i_2		
i_{2A}		
i_{2B}	}	Ringströme des Käfigläufers
.		
.		
i_{2N}		
$i_{2(0)}$	}	Symmetrische Komponenten der Ringströme
$i_{2(1)}$		
.		
.		
$i_{2(N-1)}$	}	
j		
K	$\sqrt{-1}$	
l		Kennzahl für die Transformation in symmetrische Komponenten
L		magnetisch wirksame Blechlänge
$L_{1\sigma}$		Matrix der Induktivitäten
		Streuinduktivität eines Ständerstranges
		(„geometrische“ Nuten- und Stirnstreuung)
L_{1v}		Luftspaltinduktivität eines Ständerstranges für das v-te Feld
L_{2S}		Streuinduktivität eines Stabes
L_{2R}		Streuinduktivität eines Ringstückes
		zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stäben
L_{2L}		Luftspaltinduktivität einer Käfigmasche
L_{2M}		Gesamtinduktivität einer Käfigmasche
		(vor der Transformation in symmetrische Komponenten)
$L_{2(K)}$		Gesamtinduktivität einer Käfigmasche
		(nach der Transformation in symmetrische Komponenten)
L_{2v}		Gesamtinduktivität einer Käfigmasche für das v-te Feld
m		Strangzahl
M_{2L}		Luftspaltgegeninduktivität der Käfigmaschen untereinander
M_{12v}		Höchstwert der Gegeninduktivität zwischen einem Ständerstrang
		und einer Käfigmasche für das v-te Feld
M_v		Gegeninduktivität Ständer — Läufer
		(nach der Transformation in symmetrische Komponenten)

N	Anzahl der Käfigmaschen (für eine doppelte Polteilung)
$p = \frac{d}{dt}$	Differentiation nach der Zeit
p_z	Polpaarzahl
R	Bohrungsradius
R_1	Ohmscher Widerstand eines Ständerstranges
$R_2 S$	Ohmscher Widerstand eines Stabes
$R_2 R$	Ohmscher Widerstand eines Ringstückes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stäben
$R_2 M$	Ohmscher Widerstand einer Käfigmasche (vor der Transformation in symmetrische Komponenten)
$R_2 (K)$	Ohmscher Widerstand einer Käfigmasche (nach der Transformation in symmetrische Komponenten)
R_{2v}	Ohmscher Widerstand einer Käfigmasche für das v-te Feld
s	Schlupf
T	Drehmoment
u_1	Matrix der Ständerstrangspannungen
u_{1v}	Matrix der Ständerspannungen für das v-te Feld
u_{1a}	} Ständerstrangspannungen
u_{1b}	
.	
.	
.	
u_{1m}	} Symmetrische Komponenten der Ständerstrangspannungen
$u_{1(0)}$	
$u_{1(1)}$	
.	
.	
$u_{1(m-1)}$	
w_1	Windungszahl eines Ständerstranges (für ein Polpaar)
Z_v	Impedanzmatrix für das v-te Feld
Z_{11}	Impedanzmatrix des Ständers
$Z_2 S$	Stabimpedanz
$Z_2 M$	Impedanz einer Käfigmasche (vor der Transformation in symmetrische Komponenten)
Z_{22}	Impedanzmatrix des Läufers
$Z_2 (K)$	Impedanz einer Käfigmasche (nach der Transformation in symmetrische Komponenten)
Z_{2v}	Impedanz einer Käfigmasche für das v-te Feld
γ	Momentane Winkelstellung des Läufers (el. Grd.)
$\dot{\gamma}$	Momentane Winkelgeschwindigkeit des Läufers (el. Grd.)
γ_S	Schrägungswinkel der Läuferuten (el. Grd.)
ϑ	magnetisch wirksamer Luftspalt
ε	Winkel zwischen benachbarten Wicklungsachsen (el. Grd.)
ϕ	Fluß
ν	Ordnungszahl
μ_0	Induktionskonstante

Indizes

1	Ständer
2	Läufer
t	Transponierte einer Matrix
*	konjugiert komplex
'	transformierte Größe
d	Längs . . .
q	Quer . . .
v	bezogen auf das v-te Feld

Komplexe Zahlen sind i. a. nicht besonders gekennzeichnet.
Matrizen sind durch *Fettdruck* hervorgehoben.

Literaturhinweise

- [1] *Kron, G.*: „The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery“, General Electric Review Vol. 38—41, 1935—1938 (Aufsatzfolge).
- [2] *White, D. C., Woodson, H. H.*: „Electromechanical Energy Conversion“, John Wiley & Sons, New York 1959.
- [3] *Dunfield, J. C., Barton, T. H.*: „Polyphase to Two-Axis Transformation for Real Windings“, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 87, Nr. 5, Mai 1968, S. 1342—1346.
- [4] *Dunfield, J. C., Barton, T. H.*: „Axis Transformations for Practical Primitive Machines“, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 87, Nr. 5, Mai 1968, S. 1346—1354.
- [5] *Jones, C. V.*: „The Unified Theory of Electrical Machines“, Butterworth, London 1967.
- [6] *Klima, V.*: „Symmetrische Komponenten, ihr Zusammenhang mit trigonometrischer Interpolation, Fourierschen Reihen und Vektorkomponenten“, Elektrot. u. Maschinenbau 84 (1967), H. 8, S. 354—365.
- [7] *Klima, V., Heller, B.*: „Regeln zur Vermeidung von Ausgleichsströmen im Dreieck bzw. in parallelen Zweigen“, Acta Technica CSAV 1970, H. 1, S. 1—15.
- [8] *Bausch, H., Jordan, H., Weis, M.*: „Digitale Berechnung des transienten Verhaltens von stromverdrängungsfreien Drehstrom-Käfigläufermotoren“, ETZ-A, Bd. 89 (1968), S. 361—366.
- [9] *Bausch, H., Jordan, H., Weis, M.*: „Dynamische Vorgänge beim Anfahren von Drehstromasynchronmaschinen mit Anwurfmotor“, ETZ-A, Bd. 90 (1969), S. 470—475.
- [10] *Zurmühl, R.*: „Matrizen“, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1964.